

## Контрольная работа по математике (2015 год)

### Отделение математики МАН

#### 9 класс

**I уровень** (полное и правильное решение оценивается в 3 балла)

1. Составьте квадратное уравнение, корни которого в два раза больше корней данного квадратного уравнения  $2x^2 - 8x + 3 = 0$ .
2. У Пети и Маши вместе 21 грн. У Маши на 20 грн. больше, чем у Пети. Сколько денег у каждого, если их сбережения выражаются целым числом?
3. Зная, что  $2 \otimes 5 = 29$ , найдите  $4 \otimes 3$  (действие  $\otimes$  опишите).

**II уровень** (полное и правильное решение оценивается в 5 баллов)

4. Длины сторон  $n$ -угольника равны  $1, 2, \dots, 2^{n-1}$ ,  $n > 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . При каком наименьшем  $n$  это возможно (ответ аргументируйте)?
5. Постройте график функции

$$y = x + [x] + \{x\} + x^0 + [0,2015],$$

где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ , т.е. наибольшее целое число  $s$ , не превышающее  $x$ .

$\{x\}$  – дробная часть числа  $x$ , которая является разностью между числом  $x$  и его целой частью.

**III уровень** (полное и правильное решение оценивается в 7 баллов)

6. Длины сторон остроугольного треугольника являются последовательными целыми числами. Докажите, что высота к средней по длине стороне делит эту сторону на две части, разница между которыми равна 4.
7. На координатной плоскости изобразите множество пар  $(a; b)$ , для каждой из которых уравнение  $(x^2 - (a + b)x + 1)(x^2 - (a - b)x + 1) = 0$ , имеет четыре различных действительных корня.

На выполнение заданий отводится 3 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими средствами связи и электронными устройствами запрещается.

## Контрольна робота з математики (2015 рік)

### Відділення математики МАН

#### 9 клас

**I рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 3 бали)

1. Запишіть квадратне рівняння, корені якого вдвічі більші коренів даного квадратного рівняння  $2x^2 - 8x + 3 = 0$ .
2. У Петрика та Марійки разом 21 грн. У Марійки на 20 грн. більше, ніж у Петрика. Скільки грошей у кожного, якщо їхні заощадження виражаються цілим числом?
3. Знаючи, що  $2 \otimes 5 = 29$ , знайдіть  $4 \otimes 3$  (дію  $\otimes$  опишіть).

**II рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 5 балів)

4. Довжини сторін  $n$ -кутника дорівнюють  $1, 2, \dots, 2^{n-1}$ ,  $n > 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . При якому найменшому  $n$  це є можливим (висновки аргументуйте)?
5. Побудуйте графік функції

$$y = x + [x] + \{x\} + x^0 + [0,2015],$$

де  $[x]$  – ціла частина числа  $x$ , тобто найбільше ціле число  $s$ , яке не перевищує  $x$ .

$\{x\}$  – дробова частина числа  $x$ , яка є різницею між числом  $x$  і його цілою частиною.

**III рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 7 балів)

6. Довжини сторін гострокутного трикутника є послідовними цілими числами. Доведіть, що висота до середньої за довжиною сторони ділить цю сторону на дві частини, різниця між якими дорівнює 4.
7. На координатній площині зобразити множину пар  $(a; b)$ , для кожної з яких рівняння  $(x^2 - (a + b)x + 1)(x^2 - (a - b)x + 1) = 0$ , має чотири різних дійсних кореня.

На виконання завдань відводиться 3 години.

Користуватись калькуляторами, мобільними телефонами та іншими засобами зв'язку та електронними пристроями забороняється.

**Контрольная работа по математике (2015 год)**

**Отделение математики МАН**

**10 класс**

**I уровень** (полное и правильное решение оценивается в 3 балла)

1. Велосипедист ехал 20 мин. со  $V = 9$  м/ч, а потом за 10 мин. проехал 1 м. Найдите среднюю скорость велосипедиста в м/ч ( $V_{\text{ср}}$ ).
2. При каких значениях параметра  $a$  из отрезков с длинами 1,  $a - 3$ ,  $0,5a + 5$  можно составить треугольник?
3. Упростите выражение:  $[x + 2015] + [x - 3] + [x - 2]$ ,  
где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ , т.е. наибольшее целое число  $c$ , не превышающее  $x$ .

**II уровень** (полное и правильное решение оценивается в 5 баллов)

4. Постройте график функции

$$y = (2 - x)^{\sqrt{-x^2 - 2x - 1}}.$$

5. Найдите все целочисленные решения уравнения  $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13$ .

**III уровень** (полное и правильное решение оценивается в 7 баллов)

6. Дан параллелограмм  $ABCD$  и внутри него взята точка  $O$  так, что  $\angle OAD = \angle OCD$ . Докажите, что  $\angle OBC = \angle ODC$ .
7. При каком значении параметра  $a$  сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + x\sqrt{a^2 - 4a} - a - 2 = 0$$

принимает наименьшее значение?

На выполнение заданий отводится 3 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими средствами связи и электронными устройствами запрещается.

**Контрольна робота з математики (2015 рік)**

**Відділення математики МАН**

**10 клас**

**I рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 3 бали)

1. Велосипедист їхав 20 хв. зі  $V = 9$  м/хв, а потім за 10 хв. проїхав 1 м. Знайдіть середню швидкість велосипедиста у м/хв ( $V_{\text{ср}}$ ).
2. При яких значеннях параметра  $a$  з відрізків, довжини яких дорівнюють 1;  $a - 3$ ;  $0,5a + 5$ , можна скласти трикутник?
3. Спростіть вираз:  $[x + 2015] + [x - 3] + [x - 2]$ ,  
де  $[x]$  – ціла частина числа  $x$ , тобто найбільше ціле число  $c$ , яке не перевищує  $x$ .

**II рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 5 балів)

4. Побудуйте графік функції

$$y = (2 - x)^{\sqrt{-x^2 - 2x - 1}}.$$

5. Знайдіть усі цілочисельні розв'язки рівняння  $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13$ .

**III рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 7 балів)

6. Дано паралелограм  $ABCD$ , всередині якого взяли точку  $O$  так, що  $\angle OAD = \angle OCD$ . Доведіть, що  $\angle OBC = \angle ODC$ .
7. При якому значенні параметра  $a$  сума квадратів коренів рівняння

$$x^2 + x\sqrt{a^2 - 4a} - a - 2 = 0$$

приймає найменшого значення?

На виконання завдань відводиться 3 години.

Користуватись калькуляторами, мобільними телефонами та іншими засобами зв'язку та електронними пристроями забороняється.

**Контрольная работа по математике (2015 год)**

**Отделение математики МАН**

**11 класс**

**I уровень** (полное и правильное решение оценивается в 3 балла)

1. Сравните числа:  $\sin 11^\circ \cdot \cos 23^\circ$  и  $\sin 25^\circ$ .
2. Предположим, что Земной шар по экватору плотно обтянут верёвкой. Длину верёвки увеличили на 1 м. Образовавшийся зазор равномерно распределили по экватору. Сможет ли в этот зазор просмыгнуть мышь (ответ обоснуйте)?
3. Решите неравенство:

$$(0, (4))^{x^2-1} > (0, (6))^{x^2+7x-12}$$

**II уровень** (полное и правильное решение оценивается в 5 баллов)

4. Постройте график функции

$$y = 2^{[\cos x]}, \quad 0 \leq x \leq 180^\circ,$$

где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ , т.е. наибольшее целое число  $c$ , не превышающее  $x$ .

5. В треугольнике  $ABC$  со сторонами  $AB = 5$ ,  $BC = \sqrt{17}$ ,  $CA = 4$  на стороне  $CA$  взята точка  $M$  так, что  $CM = 1$ . Найти расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников  $ABM$  и  $BCM$ .

**III уровень** (полное и правильное решение оценивается в 7 баллов)

6. Дан набор из 2015 чисел. Известно: сумма любых 10 из них является положительной. Докажите, что сумма всех этих чисел является положительной.
7. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение имеет ровно восемь решений:

$$\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1.$$

На выполнение заданий отводится 3 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими средствами связи и электронными устройствами запрещается.

**Контрольна робота з математики (2015 рік)**

**Відділення математики МАН**

**11 клас**

**I рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 3 бали)

1. Порівняйте числа:  $\sin 11^\circ \cdot \cos 23^\circ$  і  $\sin 25^\circ$ .
2. Припустимо, що Земна куля за екватором щільно обтягнута мотузкою. Довжину мотузки збільшили на 1 м. Утворений зазор рівномірно розподілили за екватором. Чи зможе у цей зазор прослизнути миша (відповідь обґрунтуйте)?
3. Розв'яжіть нерівність:

$$(0, (4))^{x^2-1} > (0, (6))^{x^2+7x-12}$$

**II рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 5 балів)

4. Побудуйте графік функції

$$y = 2^{[\cos x]}, \quad 0 \leq x \leq 180^\circ,$$

де  $[x]$  – ціла частина числа  $x$ , тобто найбільше ціле число  $c$ , яке не перевищує  $x$ .

5. У трикутнику  $ABC$  зі сторонами  $AB = 5$ ,  $BC = \sqrt{17}$ ,  $CA = 4$  на стороні  $CA$  взяли точку  $M$  так, що  $CM = 1$ . Знайти відстань між центрами кіл, описаних навколо трикутників  $ABM$  і  $BCM$ .

**III рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 7 балів)

6. Дано набір з 2015 чисел. Відомо: сума будь-яких 10 з них є додатною. Доведіть, що сума всіх даних чисел є додатною.
7. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння має рівно вісім розв'язків:

$$\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1.$$

На виконання завдань відводиться 3 години.

Користуватись калькуляторами, мобільними телефонами та іншими засобами зв'язку та електронними пристроями забороняється.

## Контрольная работа по математике (2015 год)

### Отделение экономики МАН

#### 9 класс

**I уровень** (полное и правильное решение оценивается в 3 балла)

1. Составьте квадратное уравнение, корни которого в два раза больше корней данного квадратного уравнения  $2x^2 - 8x + 3 = 0$ .
2. У Пети и Маши вместе 21 грн. У Маши на 20 грн. больше, чем у Пети. Сколько денег у каждого, если их сбережения выражаются целым числом?
3. Зная, что  $2 \otimes 5 = 29$ , найдите  $4 \otimes 3$  (действие  $\otimes$  опишите).

**II уровень** (полное и правильное решение оценивается в 5 баллов)

4. Яблоко плавает на воде так, что  $\frac{1}{5}$  его часть находится над водой, а  $\frac{4}{5}$  – под водой. Под водой яблоко начинает кушать рыбка, одновременно с которой над водой яблоко начинает клевать птичка, со скоростью в два раза большей, чем ест его рыбка. Какая часть яблока достанется рыбке, а какая – птичке (ответ обоснуйте)?
5. Число  $x$  увеличили на 44%. На сколько процентов увеличилось число  $\sqrt{\frac{x}{3}}$ ?

**III уровень** (полное и правильное решение оценивается в 7 баллов)

6. Длины сторон остроугольного треугольника являются последовательными целыми числами. Докажите, что высота к средней по длине стороне делит эту сторону на две части, разница между которыми равна 4.
7. На координатной плоскости изобразите множество пар  $(a; b)$ , для каждой из которых уравнение  $(x^2 - (a + b)x + 1)(x^2 - (a - b)x + 1) = 0$ , имеет четыре различных действительных корня.

На выполнение заданий отводится 3 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими средствами связи и электронными устройствами запрещается.

## Контрольна робота з математики (2015 рік)

### Відділення економіки МАН

#### 9 клас

**I рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 3 бали)

1. Запишіть квадратне рівняння, корені якого вдвічі більші коренів даного квадратного рівняння  $2x^2 - 8x + 3 = 0$ .
2. У Петрика та Марійки разом 21 грн. У Марійки на 20 грн. більше, ніж у Петрика. Скільки грошей у кожного, якщо їхні заощадження виражаються цілим числом?
3. Знаючи, що  $2 \otimes 5 = 29$ , знайдіть  $4 \otimes 3$  (дію  $\otimes$  опишіть).

**II рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 5 балів)

4. Яблуко плаває на воді так, що  $\frac{1}{5}$  його частина знаходиться над водою, а  $\frac{4}{5}$  – під водою. Під водою яблуко починає їсти рыбка, одночасно з якою над водою яблуко починає клювати пташка, зі швидкістю вдвічі більшою, ніж кушає його рыбка. Яка частина яблука дістанеться рибці, а яка – пташці (відповідь обґрунтуйте)?
5. Число  $x$  збільшили на 44%. На скільки процентів збільшилось число  $\sqrt{\frac{x}{3}}$ ?

**III рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 7 балів)

6. Довжини сторін гострокутного трикутника є послідовними цілими числами. Доведіть, що висота до середньої за довжиною сторони ділить цю сторону на дві частини, різниця між якими дорівнює 4.
7. На координатній площині зобразити множину пар  $(a; b)$ , для кожної з яких рівняння  $(x^2 - (a + b)x + 1)(x^2 - (a - b)x + 1) = 0$ , має чотири різних дійсних кореня.

На виконання завдань відводиться 3 години.

Користуватись калькуляторами, мобільними телефонами та іншими засобами зв'язку та електронними пристроями забороняється.

**Контрольная работа по математике (2015 год)**  
**Отделение экономики МАН**  
**10 класс**

**I уровень** (полное и правильное решение оценивается в 3 балла)

1. Велосипедист ехал 20 мин. со  $V = 9$  м/ч, а потом за 10 мин. проехал 1 м. Найдите среднюю скорость велосипедиста в м/ч ( $V_{\text{ср}}$ ).
2. При каких значениях параметра  $a$  из отрезков с длинами 1,  $a - 3$ ,  $0,5a + 5$  можно составить треугольник?
3. Упростите выражение:  $[x + 2015] + [x - 3] + [x - 2]$ ,  
где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ , т.е. наибольшее целое число  $c$ , не превышающее  $x$ .

**II уровень** (полное и правильное решение оценивается в 5 баллов)

4. В сосновом бору лиственные деревья составляют 1% от всех. Директор лесозаготовляющего предприятия сообщил, что после запланированной ими вырубki (вырубаться будут только сосны) лиственные деревья составят 2%. Община сочла, что вырубka ~1% деревьев бору не повредит и одобрила проект. А сколько же точно процентов леса будет вырублено?
5. Два автохозяйства отправили несколько машин для перевозки грузов. Число машин, отправленных из второго автохозяйства, меньше удвоенного числа машин, отправленных из первого. Если бы первое автохозяйство послало на две машины больше, а второе – на две меньше, то машин из второго автохозяйства было бы не меньше, чем машин из первого. Сколько машин отправлено из каждого автохозяйства, если всего было отправлено меньше 16 автомашин?

**III уровень** (полное и правильное решение оценивается в 7 баллов)

6. Дан параллелограмм  $ABCD$  и внутри него взята точка  $O$  так, что  $\angle OAD = \angle OCD$ . Докажите, что  $\angle OBC = \angle ODC$ .
7. При каком значении параметра  $a$  сумма квадратов корней уравнения  
$$x^2 + x\sqrt{a^2 - 4a} - a - 2 = 0$$
 принимает наименьшее значение?

На выполнение заданий отводится 3 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими средствами связи и электронными устройствами запрещается.

**Контрольна робота з математики (2015 рік)**  
**Відділення економіки МАН**  
**10 клас**

**I рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 3 бали)

1. Велосипедист їхав 20 хв. зі  $V = 9$  м/хв, а потім за 10 хв. проїхав 1 м. Знайдіть середню швидкість велосипедиста у м/хв ( $V_{\text{ср}}$ ).
2. При яких значеннях параметра  $a$  з відрізків, довжини яких дорівнюють 1;  $a - 3$ ;  $0,5a + 5$ , можна скласти трикутник?
3. Спростіть вираз:  $[x + 2015] + [x - 3] + [x - 2]$ ,  
де  $[x]$  – ціла частина числа  $x$ , тобто найбільше ціле число  $c$ , яке не перевищує  $x$ .

**II рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 5 балів)

4. У сосновому лісі листяні дерева складають 1% від усіх. Директор лісозаготовлюючого підприємства повідомив, що після запланованої ним вирубки (вирубувати будуть тільки сосни) листяні дерева складуть 2%. Громада визнала, що вирубка ~1% дерев лісу не нашкодить і схвалила проект. А скільки ж точно відсотків лісу буде вирублено?
5. Два автогосподарства відправили кілька машин для перевезення вантажу. Кількість машин, які було відправлено з другого автогосподарства, менше подвоєної кількості машин, відправлених з першого. Якби перше автогосподарство відправило на дві машини більше, а друге – на дві менше, то машин з другого автогосподарства було б не менше, ніж машин з першого. Скільки машин відправлено з кожного автогосподарства, якщо всього було відправлено менше 16 автомашин?

**III рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 7 балів)

6. Дано паралелограм  $ABCD$ , всередині якого взяли точку  $O$  так, що  $\angle OAD = \angle OCD$ . Доведіть, що  $\angle OBC = \angle ODC$ .
7. При якому значенні параметра  $a$  сума квадратів коренів рівняння  
$$x^2 + x\sqrt{a^2 - 4a} - a - 2 = 0$$
 приймає найменшого значення?

На виконання завдань відводиться 3 години.

Користуватись калькуляторами, мобільними телефонами та іншими засобами зв'язку та електронними пристроями забороняється.

## Контрольная работа по математике (2015 год)

### Отделение экономики МАН

#### 11 класс

**I уровень** (полное и правильное решение оценивается в 3 балла)

1. Сравните числа:  $\sin 11^\circ \cdot \cos 23^\circ$  и  $\sin 25^\circ$ .
2. Предположим, что Земной шар по экватору плотно обтянут верёвкой. Длину верёвки увеличили на 1 м. Образовавшийся зазор равномерно распределили по экватору. Сможет ли в этот зазор прошмыгнуть мышь (ответ обоснуйте)?
3. Решите неравенство:  $(0, (4))^{x^2-1} > (0, (6))^{x^2+7x-12}$

**II уровень** (полное и правильное решение оценивается в 5 баллов)

4. Одному торговцу редкими экзотическими фруктами необходимо посетить 30 рынков. У него имеется 3 мешка, в каждый из которых помещается не более 30 плодов. При посещении рынка в качестве торговой пошлины необходимо заплатить по одному плоду из каждого непустого мешка. Если изначально у торговца было 90 плодов, то объясните (письменно), какое наибольшее количество плодов может остаться у торговца после посещения всех 30 рынков? (Свои плоды на рынках торговец продавать не может, сшивать мешки с целью экономии тоже нельзя).
5. Внутри равнобедренного треугольника расположен другой равнобедренный треугольник. Возможно ли, чтобы боковые стороны внутреннего треугольника были бы больше, чем боковые стороны внешнего (ответ обоснуйте)?

**III уровень** (полное и правильное решение оценивается в 7 баллов)

6. Дан набор из 2015 чисел. Известно: сумма любых 10 из них является положительной. Докажите, что сумма всех этих чисел является положительной.
7. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$$

имеет ровно восемь решений.

На выполнение заданий отводится 3 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими средствами связи и электронными устройствами запрещается.

## Контрольна робота з математики (2015 рік)

### Відділення економіки МАН

#### 11 клас

**I рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 3 бали)

1. Порівняйте числа:  $\sin 11^\circ \cdot \cos 23^\circ$  і  $\sin 25^\circ$ .
2. Припустимо, що Земна куля за екватором щільно обтягнута мотузкою. Довжину мотузки збільшили на 1 м. Утворений зазор рівномірно розподілили за екватором. Чи зможе у цей зазор прослизнути миша (відповідь обґрунтуйте)?
3. Розв'яжіть нерівність:  $(0, (4))^{x^2-1} > (0, (6))^{x^2+7x-12}$

**II рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 5 балів)

4. Одному торговцю рідкими екзотичними фруктами необхідно відвідати 30 ринків. У нього є 3 мішки, у кожному з яких вміщується не більше 30 плодів. При відвідуванні ринку в якості торгового мита необхідно заплатити по одному плоду з кожного не порожнього мішка. Якщо спочатку у торговця було 90 плодів, то поясніть (письмово), яка найбільша кількість плодів може залишитись у торговця після відвідування усіх 30 ринків? (Свої плоди на ринках торговець продавати не може, зшивати мішки з метою економії також неможна).
5. Всередині рівнобедреного трикутника розташовано інший рівнобедрений трикутник. Чи можливо, щоб бічні сторони внутрішнього трикутника були більші за бічні сторони зовнішнього (відповідь обґрунтуйте)?

**III рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 7 балів)

6. Дано набір з 2015 чисел. Відомо: сума будь-яких 10 з них є додатною. Доведіть, що сума всіх даних чисел є додатною.
7. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння має рівно вісім розв'язків:

$$\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1.$$

На виконання завдань відводиться 3 години.

Користуватись калькуляторами, мобільними телефонами та іншими засобами зв'язку та електронними пристроями забороняється.

## Контрольная работа по математике (2015 год)

### Отделение технических наук МАН

#### 9 класс

**I уровень** (полное и правильное решение оценивается в 3 балла)

1. Составьте квадратное уравнение, корни которого в два раза больше корней данного квадратного уравнения  $2x^2 - 8x + 3 = 0$ .
2. У Пети и Маши вместе 21 грн. У Маши на 20 грн. больше, чем у Пети. Сколько денег у каждого, если их сбережения выражаются целым числом?
3. Зная, что  $2 \otimes 5 = 29$ , найдите  $4 \otimes 3$  (действие  $\otimes$  опишите).

**II уровень** (полное и правильное решение оценивается в 5 баллов)

4. Можно ли расположить 6 одинаковых неотточенных карандашей так, чтобы каждый касался пяти остальных (если да, то ответ нарисуйте, если нет, то объясните, почему)?
5. Необходимо сделать деревянный фронтон, форма которого – равносторонний треугольник, на дом. Сколько погонных метров (погонный метр – это единица, которой измеряют длину материала независимо от ширины) планок потребуется, чтобы зашить щели между досками, приняв для определённости, что ширина дома равна 708 см., а ширина досок – 12 см.?

**III уровень** (полное и правильное решение оценивается в 7 баллов)

6. Длины сторон остроугольного треугольника являются последовательными целыми числами. Докажите, что высота к средней по длине стороне делит эту сторону на две части, разница между которыми равна 4.
7. На координатной плоскости изобразите множество пар  $(a; b)$ , для каждой из которых уравнение  $(x^2 - (a + b)x + 1)(x^2 - (a - b)x + 1) = 0$ , имеет четыре различных действительных корня.

На выполнение заданий отводится 3 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими средствами связи и электронными устройствами запрещается.

## Контрольна робота з математики (2015 рік)

### Відділення технічних наук МАН

#### 9 клас

**I рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 3 бали)

1. Запишіть квадратне рівняння, корені якого вдвічі більші коренів даного квадратного рівняння  $2x^2 - 8x + 3 = 0$ .
2. У Петрика та Марійки разом 21 грн. У Марійки на 20 грн. більше, ніж у Петрика. Скільки грошей у кожного, якщо їхні заощадження виражаються цілим числом?
3. Знаючи, що  $2 \otimes 5 = 29$ , знайдіть  $4 \otimes 3$  (дію  $\otimes$  опишіть).

**II рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 5 балів)

4. Чи можна розташувати 6 однакових незагострених олівців так, щоб кожен дотикався п'яти інших (якщо так, то відповідь намалюйте, якщо ні, то поясніть, чому)?
5. Необхідно зробити дерев'яний фронтон, форма якого – рівносторонній трикутник, на будинок. Скільки погонних метрів (погонний метр – це одиниця, якою вимірюють довжину матеріалу незалежно від ширини) планок знадобиться, щоб зашити щілини між дошками, якщо будинок за шириною – 708 см., а ширина кожної дошки – 12 см.?

**III рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 7 балів)

6. Довжини сторін гострокутного трикутника є послідовними цілими числами. Доведіть, що висота до середньої за довжиною сторони ділить цю сторону на дві частини, різниця між якими дорівнює 4.
7. На координатній площині зобразити множину пар  $(a; b)$ , для кожної з яких рівняння  $(x^2 - (a + b)x + 1)(x^2 - (a - b)x + 1) = 0$ , має чотири різних дійсних кореня.

На виконання завдань відводиться 3 години.

Користуватись калькуляторами, мобільними телефонами та іншими засобами зв'язку та електронними пристроями забороняється.

## Контрольная работа по математике (2015 год)

### Отделение технических наук МАН

#### 10 класс

**I уровень** (полное и правильное решение оценивается в 3 балла)

1. Велосипедист ехал 20 мин. со  $V = 9$  м/ч, а потом за 10 мин. проехал 1 м. Найдите среднюю скорость велосипедиста в м/ч ( $V_{\text{ср}}$ ).
2. При каких значениях параметра  $a$  из отрезков с длинами 1,  $a - 3$ ,  $0,5a + 5$  можно составить треугольник?
3. Упростите выражение:  $[x + 2015] + [x - 3] + [x - 2]$ ,  
где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ , т.е. наибольшее целое число  $c$ , не превышающее  $x$ .

**II уровень** (полное и правильное решение оценивается в 5 баллов)

4. Имеются две круглые башни одинаковой высоты, но разного диаметра. Вокруг каждой из них идёт винтовая лестница, причём угол наклона каждой из лестниц к горизонту везде постоянен и одинаков для обеих башен. По какой из лестниц путь к верхней площадке башни длиннее: по той, у которой диаметр больше, или наоборот (ответ обоснуйте)?
5. По одну сторону от железнодорожного полотна на разном расстоянии от него (не на общем перпендикуляре) расположены два населённых пункта  $A$  и  $B$ . Где именно вдоль полотна надо сделать железнодорожную станцию, чтобы расстояние от неё до населённых пунктов было минимально (ответ аргументируйте)?

**III уровень** (полное и правильное решение оценивается в 7 баллов)

6. Дан параллелограмм  $ABCD$  и внутри него взята точка  $O$  так, что  $\angle OAD = \angle OCD$ . Докажите, что  $\angle OBC = \angle ODC$ .
7. При каком значении параметра  $a$  сумма квадратов корней уравнения
$$x^2 + x\sqrt{a^2 - 4a} - a - 2 = 0$$
 принимает наименьшее значение?

На выполнение заданий отводится 3 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими средствами связи и электронными устройствами запрещается.

## Контрольна робота з математики (2015 рік)

### Відділення технічних наук МАН

#### 10 клас

**I рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 3 бали)

1. Велосипедист їхав 20 хв. зі  $V = 9$  м/хв, а потім за 10 хв. проїхав 1 м. Знайдіть середню швидкість велосипедиста у м/хв ( $V_{\text{ср}}$ ).
2. При яких значеннях параметра  $a$  з відрізків, довжини яких дорівнюють 1;  $a - 3$ ;  $0,5a + 5$ , можна скласти трикутник?
3. Спростіть вираз:  $[x + 2015] + [x - 3] + [x - 2]$ ,  
де  $[x]$  – ціла частина числа  $x$ , тобто найбільше ціле число  $c$ , яке не перевищує  $x$ .

**II рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 5 балів)

4. Є дві круглі вежі однакової висоти, але різні за діаметром. Навколо кожної з них ідуть гвинтові сходи, причому для обох веж кут нахилу сходів до горизонту скрізь є постійним і однаковим. За якими сходами шлях до верхньої площадки вежі є довшим: у тієї, діаметр якої більше, чи навпаки (відповідь обґрунтуйте)?
5. По один бік від залізничного полотна на різній відстані від нього (не на спільному перпендикулярі) розташовані два селища  $A$  та  $B$ . Де саме вздовж полотна необхідно спорудити залізничну станцію, щоб відстань від неї до населених пунктів була найменшою (відповідь аргументуйте)?

**III рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 7 балів)

6. Дано паралелограм  $ABCD$ , всередині якого взяли точку  $O$  так, що  $\angle OAD = \angle OCD$ . Доведіть, що  $\angle OBC = \angle ODC$ .
7. При якому значенні параметра  $a$  сума квадратів коренів рівняння
$$x^2 + x\sqrt{a^2 - 4a} - a - 2 = 0$$
 приймає найменшого значення?

На виконання завдань відводиться 3 години.

Користуватись калькуляторами, мобільними телефонами та іншими засобами зв'язку та електронними пристроями забороняється.



## Контрольная работа по математике (2015 год)

### Отделение технических наук МАН

#### 11 класс

**I уровень** (полное и правильное решение оценивается в 3 балла)

1. Сравните числа:  $\sin 11^\circ \cdot \cos 23^\circ$  и  $\sin 25^\circ$ .
2. Предположим, что Земной шар по экватору плотно обтянут верёвкой. Длину верёвки увеличили на 1 м. Образовавшийся зазор равномерно распределили по экватору. Сможет ли в этот зазор проскочить мышь (ответ обоснуйте)?
3. Решите неравенство:  $(0, (4))^{x^2-1} > (0, (6))^{x^2+7x-12}$

**II уровень** (полное и правильное решение оценивается в 5 баллов)

4. Центры одинаковых кругов радиуса 1 лежат в вершинах треугольника со сторонами 3; 4; 5. Найдите сумму площадей частей этих кругов, лежащих внутри треугольника.
5. Строительную компанию наняли построить дорогу из города  $N$  в город  $M$ , и за первый восьмичасовой рабочий день она построила 2 км дороги. Ночью прошёл дождь и смыл всю разметку, которая была нарисована на построенном участке дороги. На следующий день разметка была восстановлена, и на это ушла часть рабочего времени. Скорость восстановления разметки – 6 км/ч. В результате на второй день был построен более короткий участок дороги. Следующей ночью вся разметка опять была смыта дождём, и её восстановление снова потребовало части рабочего времени. На каком максимальном расстоянии могли находиться города  $N$  и  $M$ , если известно, что дорога между ними в результате была построена, и во время строительства каждую ночь шёл дождь?

**III уровень** (полное и правильное решение оценивается в 7 баллов)

6. Дан набор из 2015 чисел. Известно: сумма любых 10 из них является положительной. Докажите, что сумма всех этих чисел является положительной.
7. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$$

имеет ровно восемь решений.

На выполнение заданий отводится 3 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими средствами связи и электронными устройствами запрещается.

## Контрольна робота з математики (2015 рік)

### Відділення технічних наук МАН

#### 11 клас

**I рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 3 бали)

1. Порівняйте числа:  $\sin 11^\circ \cdot \cos 23^\circ$  і  $\sin 25^\circ$ .
2. Припустимо, що Земна куля за екватором щільно обтягнута мотузкою. Довжину мотузки збільшили на 1 м. Утворений зазор рівномірно розподілили за екватором. Чи зможе у цей зазор прослизнути миша (відповідь обґрунтуйте)?
3. Розв'яжіть нерівність:  $(0, (4))^{x^2-1} > (0, (6))^{x^2+7x-12}$

**II рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 5 балів)

4. Центри однакових кругів з радіусом 1 лежать у вершинах трикутника зі сторонами 3; 4; 5. Знайдіть суму площ частин цих кругів, що лежать всередині трикутника.
5. Будівельна компанія має побудувати дорогу з міста  $N$  у місто  $M$ . За перший восьмигодинний робочий день вона побудувала 2 км дороги. Уночі пройшов дощ і змив усю розмітку, яка була нарисована на побудованій ділянці дороги. Наступного дня розмітка була відновлена, але на це пішла частина робочого часу. Швидкість відновлення розмітки – 6 км/год. У результаті на другий день було побудовано коротшу ділянку дороги. Наступної ночі вся розмітка знову була змита дощем, а її відновлення знову забрало частину робочого часу. На якій максимальній відстані могли знаходитись міста  $N$  і  $M$ , якщо відомо, що дорога між ними у результаті була побудована, а під час будівництва кожної ночі йшов дощ?

**III рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 7 балів)

6. Дано набір з 2015 чисел. Відомо: сума будь-яких 10 з них є додатною. Доведіть, що сума всіх даних чисел є додатною.
7. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння має рівно вісім розв'язків:

$$\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1.$$

На виконання завдань відводиться 3 години.

Користуватись калькуляторами, мобільними телефонами та іншими засобами зв'язку та електронними пристроями забороняється.

## Контрольная работа по математике (2015 год)

### Отделение компьютерных наук МАН

#### 9 класс

**I уровень** (полное и правильное решение оценивается в 3 балла)

1. Составьте квадратное уравнение, корни которого в два раза больше корней данного квадратного уравнения  $2x^2 - 8x + 3 = 0$ .
2. У Пети и Маши вместе 21 грн. У Маши на 20 грн. больше, чем у Пети. Сколько денег у каждого, если их сбережения выражаются целым числом?
3. Зная, что  $2 \otimes 5 = 29$ , найдите  $4 \otimes 3$  (действие  $\otimes$  опишите).

**II уровень** (полное и правильное решение оценивается в 5 баллов)

4. В землеустроительной практике иногда возникает необходимость разделить участок треугольной формы на три равновеликие трапеции (трапеции, которые имеют равные площади): такая форма удобнее для механизированной обработки. Как это сделать (решение обоснуйте и нарисуйте)?
5. Некоторое трехзначное число увеличили на  $p\%$ , (где  $p$  – целое число в диапазоне от 1 до 99) и получили другое целое число. Полученное число снова увеличили на  $p\%$  и получили 1183. Напишите в ответе через запятую исходное число и количество процентов  $p$ , на которое его увеличивали.

**III уровень** (полное и правильное решение оценивается в 7 баллов)

6. Длины сторон остроугольного треугольника являются последовательными целыми числами. Докажите, что высота к средней по длине стороне делит эту сторону на две части, разница между которыми равна 4.
7. На координатной плоскости изобразите множество пар  $(a; b)$ , для каждой из которых уравнение  $(x^2 - (a + b)x + 1)(x^2 - (a - b)x + 1) = 0$ , имеет четыре различных действительных корня.

На выполнение заданий отводится 3 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими средствами связи и электронными устройствами запрещается.

## Контрольна робота з математики (2015 рік)

### Відділення комп'ютерних наук МАН

#### 9 клас

**I рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 3 бали)

1. Запишіть квадратне рівняння, корені якого вдвічі більші коренів даного квадратного рівняння  $2x^2 - 8x + 3 = 0$ .
2. У Петрика та Марійки разом 21 грн. У Марійки на 20 грн. більше, ніж у Петрика. Скільки грошей у кожного, якщо їхні заощадження виражаються цілим числом?
3. Знаючи, що  $2 \otimes 5 = 29$ , знайдіть  $4 \otimes 3$  (дію  $\otimes$  опишіть).

**II рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 5 балів)

4. У землевпорядній практиці іноді виникає необхідність розділити ділянку трикутної форми на три рівновеликі трапеції (трапеції, що мають рівні площі): така форма зручніше для механізованої обробки. Як це зробити (розв'язок обґрунтуйте та нарисуйте)?
5. Деяке тризначне число збільшили на  $p\%$ , (де  $p$  – ціле число в діапазоні від 1 до 99) і отримали інше ціле число. Отримане число знову збільшили на  $p\%$  і отримали 1183. Напишіть у відповідь через кому вихідне число і кількість процентів  $p$ , на яку його збільшували.

**III рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 7 балів)

6. Довжини сторін гострокутного трикутника є послідовними цілими числами. Доведіть, що висота до середньої за довжиною сторони ділить цю сторону на дві частини, різниця між якими дорівнює 4.
7. На координатній площині зобразити множину пар  $(a; b)$ , для кожної з яких рівняння  $(x^2 - (a + b)x + 1)(x^2 - (a - b)x + 1) = 0$ , має чотири різних дійсних кореня.

На виконання завдань відводиться 3 години.

Користуватись калькуляторами, мобільними телефонами та іншими засобами зв'язку та електронними пристроями забороняється.

## Контрольная работа по математике (2015 год)

### Отделение компьютерных наук МАН

#### 10 класс

**I уровень** (полное и правильное решение оценивается в 3 балла)

1. Велосипедист ехал 20 мин. со  $V = 9$  м/ч, а потом за 10 мин. проехал 1 м. Найдите среднюю скорость велосипедиста в м/ч ( $V_{\text{ср}}$ ).
2. При каких значениях параметра  $a$  из отрезков с длинами 1,  $a - 3$ ,  $0,5a + 5$  можно составить треугольник?
3. Упростите выражение:  $[x + 2015] + [x - 3] + [x - 2]$ ,  
где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ , т.е. наибольшее целое число  $c$ , не превышающее  $x$ .

**II уровень** (полное и правильное решение оценивается в 5 баллов)

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной тремя линиями:  $y = 1 - x^2$ ,  $y = \sqrt{x} + 1$ ,  $x = 1$ .
5. На Петинном счету в банке лежит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов. Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет (ответ обоснуйте)?

**III уровень** (полное и правильное решение оценивается в 7 баллов)

6. Дан параллелограмм  $ABCD$  и внутри него взята точка  $O$  так, что  $\angle OAD = \angle OCD$ . Докажите, что  $\angle OBC = \angle ODC$ .
7. При каком значении параметра  $a$  сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + x\sqrt{a^2 - 4a} - a - 2 = 0$$

принимает наименьшее значение?

На выполнение заданий отводится 3 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими средствами связи и электронными устройствами запрещается.

## Контрольна робота з математики (2015 рік)

### Відділення комп'ютерних наук МАН

#### 10 клас

**I рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 3 бали)

1. Велосипедист їхав 20 хв. зі  $V = 9$  м/хв, а потім за 10 хв. проїхав 1 м. Знайдіть середню швидкість велосипедиста у м/хв ( $V_{\text{ср}}$ ).
2. При яких значеннях параметра  $a$  з відрізків, довжини яких дорівнюють 1;  $a - 3$ ;  $0,5a + 5$ , можна скласти трикутник?
3. Спростіть вираз:  $[x + 2015] + [x - 3] + [x - 2]$ ,  
де  $[x]$  – ціла частина числа  $x$ , тобто найбільше ціле число  $c$ , яке не перевищує  $x$ .

**II рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 5 балів)

4. Знайдіть площу фігури, що обмежена трьома лініями:  $y = 1 - x^2$ ,  $y = \sqrt{x} + 1$ ,  $x = 1$ .
5. На рахунку Петрика у банку лежить 500 доларів. Банк дозволяє здійснювати операції двох видів: знімати 300 доларів або вносити 198 доларів. Яку максимальну суму Петрик може зняти з рахунку, якщо інших грошей у нього немає (відповідь обґрунтуйте)?

**III рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 7 балів)

6. Дано паралелограм  $ABCD$ , всередині якого взяли точку  $O$  так, що  $\angle OAD = \angle OCD$ . Доведіть, що  $\angle OBC = \angle ODC$ .
7. При якому значенні параметра  $a$  сума квадратів коренів рівняння

$$x^2 + x\sqrt{a^2 - 4a} - a - 2 = 0$$

приймає найменшого значення?

На виконання завдань відводиться 3 години.

Користуватись калькуляторами, мобільними телефонами та іншими засобами зв'язку та електронними пристроями забороняється.

## Контрольная работа по математике (2015 год)

### Отделение компьютерных наук МАН

#### 11 класс

**I уровень** (полное и правильное решение оценивается в 3 балла)

1. Сравните числа:  $\sin 11^\circ \cdot \cos 23^\circ$  и  $\sin 25^\circ$ .
2. Предположим, что Земной шар по экватору плотно обтянут верёвкой. Длину верёвки увеличили на 1 м. Образовавшийся зазор равномерно распределили по экватору. Сможет ли в этот зазор проскочить мышь (ответ обоснуйте)?
3. Решите неравенство:  $(0, (4))^{x^2-1} > (0, (6))^{x^2+7x-12}$

**II уровень** (полное и правильное решение оценивается в 5 баллов)

4. Через двое суток начнётся небывалая жара, поэтому мэр решил вывести на улицы города 240 прицепов-цистерн с квасом (все прицепы одинаковые). Пятерым коварным врагам удалось отравить квас в одной из цистерн. Можно ли выпустить на улицы через двое суток все 239 прицепов-цистерн кваса (но только проверенных и точно без яда!), если служба безопасности поймала врагов и они сознались, что яд этот убивает не сразу после употребления, а в течение суток (может через 10 минут, а может и через 24 часа) и жители города разрешили использовать отравителей для тестирования их же яда (ответ обоснуйте)?
5. Василий просматривает числа в интервале от 100 до 200 и считает, сколько процентов останется от числа, если отбросить его первую цифру. Для какого из чисел результат будет наиболее приближён к 16% ?

**III уровень** (полное и правильное решение оценивается в 7 баллов)

6. Дан набор из 2015 чисел. Известно: сумма любых 10 из них является положительной. Докажите, что сумма всех этих чисел является положительной.
7. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$$

имеет ровно восемь решений.

На выполнение заданий отводится 3 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими средствами связи и электронными устройствами запрещается.

## Контрольна робота з математики (2015 рік)

### Відділення комп'ютерних наук МАН

#### 11 клас

**I рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 3 бали)

1. Порівняйте числа:  $\sin 11^\circ \cdot \cos 23^\circ$  і  $\sin 25^\circ$ .
2. Припустимо, що Земна куля за екватором щільно обтягнута мотузкою. Довжину мотузки збільшили на 1 м. Утворений зазор рівномірно розподілили за екватором. Чи зможе у цей зазор прослизнути миша (відповідь обґрунтуйте)?
3. Розв'яжіть нерівність:  $(0, (4))^{x^2-1} > (0, (6))^{x^2+7x-12}$

**II рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 5 балів)

4. Через дві доби почнеться спека, тому мер міста вирішив вивести на вулиці 240 причепів-цистерн з квасом (усі причепи однакові). П'ятьом підступним ворогам вдалось отруїти квас у одній з цистерн. Чи можна вивезти на вулиці через дві доби усі 239 причепів-цистерн квасу (але тільки перевірені і точно без отрути!), якщо служба безпеки спіймала ворогів і вони зізнались, що отрута вбиває не одразу після вживання, а впродовж доби (може через 10 хвилин, а може і через 24 години) і мешканці міста дозволили використовувати отруювачів при тестуванні їхньої ж отрути (відповідь обґрунтуйте)?
5. Василь перебирає числа в інтервалі від 100 до 200 і обчислює, скільки процентів залишиться від числа, якщо відкинути його першу цифру. Для якого з чисел результат буде найбільш наближеним до 16% ?

**III рівень** (повне і правильне розв'язання оцінюється у 7 балів)

6. Дано набір з 2015 чисел. Відомо: сума будь-яких 10 з них є додатною. Доведіть, що сума всіх даних чисел є додатною.
7. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння має рівно вісім розв'язків:

$$\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1.$$

На виконання завдань відводиться 3 години.

Користуватись калькуляторами, мобільними телефонами та іншими засобами зв'язку та електронними пристроями забороняється.